NOM :…………………………………… *Mars 2021*

Prénom : ………………………………… *Recrutement TP*

FORMATION INGENIEUR EN PARTENARIAT AVEC AFTP-PACA
SPECIALITE TRAVAUX PUBLICS

Session 26 mars 2021

MATHÉMATIQUES

Temps conseillé : 1 heure 30

Aucun document autorisé, calculatrices interdites.

Remarque préliminaire : Cette épreuve a pour but d’évaluer le niveau de connaissances de chacun des candidats en fonction des programmes des formations dont ils sont issus.

Il n’est pas nécessaire de répondre à toutes les questions pour obtenir la note maximale.

Conseil important : Les questions sont pour la plupart rédigées de façon à comporter des réponses de niveaux de difficulté croissants. Des réponses partielles correctes sont facilement accessibles dans chaque question et peuvent contribuer à améliorer sensiblement la note finale.

Pour chacune des neuf questions il est demandé une ou des réponses précises et concises, à inscrire dans les cadres prévus à cet effet.

Question 1 Soit $f(x) = \cos\left(\dfrac{\pi x}{x^2 + 1}\right)$, $x \in \mathbb{R}$.

Les solutions de $f(x) = 0$ sont $\left\{ x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0 \right\} = \left\{ \qquad \right\}$

La dérivée de $f(x)$ est $f'(x) =$

Les solutions de $f'(x) = 0$ sont $\left\{ x \in \mathbb{R} \mid f'(x) = 0 \right\} = \left\{ \qquad \right\}$

Cocher la bonne case: f' est paire ☐ f' est impaire ☐ f' n'est ni paire, ni impaire ☐

Compléter le tableau des variations de f

(Préciser les limites de f' et f aux bornes infinies, les signes de f' et le sens de variations de f dans les intervalles, les valeurs de f et f' aux bornes de ces intervalles.)

x	$-\infty$	$+\infty$
f'		
f		

Le graphe de f admet une asymptote (D) lorsque $x \to \pm\infty$.

L'équation de (D) est $y =$.

Pour $0 < a < 1$, le nombre n de solutions de l'équation $f(x) = a$ est

(cocher la bonne case)

$n = 0$ ☐	$n = 1$ ☐	$n = 2$ ☐
$n = 3$ ☐	$n = 4$ ☐	$n = 5$ ☐

Question 2 Dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $z^2 - (1+3i)z - 2 + i = 0$

admet pour solutions

$z_1 =$

$z_2 =$.

Dans la forme polaire $z_1 = \rho_1 \cdot e^{i\theta_1}$ et $z_2 = \rho_2 \cdot e^{i\theta_2}$
où $\rho_1 , \rho_2 \geq 0$, et $0 \leq \theta_1, \theta_2 < 2\pi$, on a

$\rho_1 =$	$\theta_1 =$
$\rho_2 =$	$\theta_2 =$

Dans la forme polaire $\rho \cdot e^{i\theta}$ de $z_1 \cdot z_2 = -2 + i$ on a

$\rho =$	$\theta =$

On en déduit la relation (à compléter)

$$\operatorname{Arctan} 2 + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) =$$

Question 3 Soit $f(x) = \ln(1 + x^2)$, $x \in \mathbb{R}$.

La primitive F de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0 est (intégrer f par parties)

$F(x) =$.

Question 4 On considère l'équation différentielle $y'' - 2y' + 10y = f(x)$.

Pour $f(x) = 0$

- la solution générale est

$y(x) =$

- la solution telle que $y(0) = 1$ et $y'(0) = -2$ est

$y(x) =$

Pour $f(x) = 10x^2 + 16x + 8$

- la fonction $y(x) = ax^2 + bx + c$ vérifie l'équation si on choisit

$a =$, $b =$, $c =$

- la solution de l'équation telle que $y(0) = 2$ et $y'(0) = 0$ est

$y(x) =$

Question 5

On considère l'équation différentielle $(x^2+1)\cdot y' - (x^2+x+1)\cdot y = 0$ sur $\mathbb{R}$.

La solution de cette équation telle que $y(0)=1$ est $y(x) =$

Question 6

On considère l'équation différentielle $3(1+x^2)\cdot y' + x\cdot y^4 = 0$ sur $\mathbb{R}$.

La solution de cette équation telle que $y(0)=1$ est $y(x) =$

Question 7

Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^3 - 12x + 9(x-1)y^2$.

Calculer

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) =$	$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) =$

Le système $\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{pmatrix}$ a pour solutions

$(x_1,y_1) = (\quad , \quad)$	$(x_2,y_2) = (\quad , \quad)$
$(x_3,y_3) = (\quad , \quad)$	$(x_4,y_4) = (\quad , \quad)$

Calculer

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) =$	$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) =$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) =$	

Préciser la valeur des coordonnées et indiquer la nature (maximum, minimum, col ou point selle) des points stationnaires (ou critiques) de f .

$M_1\ (x_1,y_1) = (\quad , \quad)$	Maximum ☐	Minimum ☐	Col ☐
$M_2\ (x_2,y_2) = (\quad , \quad)$	Maximum ☐	Minimum ☐	Col ☐
$M_3\ (x_3,y_3) = (\quad , \quad)$	Maximum ☐	Minimum ☐	Col ☐
$M_4\ (x_4,y_4) = (\quad , \quad)$	Maximum ☐	Minimum ☐	Col ☐

Question 8

On considère dans l'espace $\mathbb{R}^3$ les points A, B, C, D, E tels que les vecteurs $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OE}$ ont pour coordonnées respectives relativement à la base canonique $\{\vec{i}\ ,\ \vec{j}\ ,\ \vec{k}\}$

$$\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} x_D \\ y_D \\ z_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} x_E \\ y_E \\ z_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Déterminer a, b, c, d pour que l'équation $ax + by + cz = d$ soit celle du plan (P) passant par les points A, B, C (les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ engendrent (P)).

L'équation de (P) est

On considère la droite (Δ) orthogonale à (P) et passant par E (l'ensemble des $\overrightarrow{EM}$ orthogonaux à (P)). Déterminer $\alpha, \beta, \gamma, u, v, w$ pour que $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$,

où t varie dans $\mathbb{R}$ et où $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ sont les coordonnées de $\overrightarrow{OM}$ dans $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, soit l'équation paramétrique de (Δ).

L' équation de (Δ) est .

L'intersection de la droite (Δ) avec le plan (P) détermine un point F (la projection orthogonale de E sur (P)). Les coordonnées de $\overrightarrow{OF}$ dans $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ sont $\boxed{\begin{pmatrix} x_F \\ y_F \\ z_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}}$.

Déterminer a', b', c', d' pour que l'équation $a'x + b'y + c'z = d'$ soit celle du plan (P') passant par D, E, F ($\overrightarrow{FD}$ et $\overrightarrow{FE}$ engendrent (P')).

L'équation de (P') est .

Soit (Δ') la droite d'intersection des plans (P) et (P'). Déterminer $\alpha', \beta', \gamma', u', v', w'$ pour que $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{pmatrix}$ soit l'équation paramétrique de (Δ').

L'équation de (Δ') est $\boxed{}$.

L'angle θ formé par les normales aux plans (P) et (P') est $\boxed{\theta = }$.

Question 9

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & a & -2 \\ 2 & -2 & a \end{pmatrix}$ où $a \in \mathbb{R}$.

Calculer le déterminant de A (noté $\det A$) en fonction de a, et déterminer les racines de $\det A = 0$

$\boxed{\det A = }$ $\boxed{\text{Racines de } \det A = 0 \begin{cases} a_1 = \\ a_2 = \\ a_3 = \end{cases}}$.

Le système linéaire $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ admet une infinité de solutions pour deux valeurs de a seulement

$a = \alpha$ et $a = \beta$; ces valeurs sont $\boxed{\alpha = }$, $\boxed{\beta = }$.

Le système linéaire $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix}$ admet une infinité de solutions pour une seule valeur de a ;

cette valeur est $\boxed{a = }$.

Dans ce dernier cas l'ensemble des solutions est donné par $\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}}$ où $t \in \mathbb{R}$.